第 3 节 含参不等式恒成立问题（★★★☆）

内容提要

本节主要涉及含参不等式恒成立、存在性问题，难度整体偏高.

1．含参不等式小题常用的解题方法和上一节类似，有全分离和半分离两种：

①全分离：将原含参不等式等价变形成 $a \le f(x)$ 这类形式，进而转化为求 $f(x)$ 的最值问题. 当参变分离后的函数 $f(x)$ 不复杂，容易求最值时，可采用此法.

②半分离：将原含参不等式等价变形成 $f(x) \le g(a,x)$ 这类形式，画图分析参数 a 如何取值才能满足该不等式，这种方法往往需要关注切线、端点等临界状态.

2．全分离后几种常见情况的处理方法：（假设以下涉及到的 $f(x)$ 的最值均存在）

① $\forall x \in D$， $a \le f(x)$ 恒成立，则 $a \le f(x)_{\min}$；② $\exists x \in D$，使 $a \le f(x)$ 成立，则 $a \le f(x)_{\max}$，

③ $\forall x \in D$， $a \ge f(x)$ 恒成立，则 $a \ge f(x)_{\max}$；④ $\exists x \in D$，使 $a \ge f(x)$ 成立，则 $a \ge f(x)_{\min}$.

典型例题

类型Ⅰ：全分离、半分离处理简单的含参不等式问题

【例 1】不等式 $\ln x - ax + 1 \le 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.

解法 1：参数可以全分离，先试试全分离，转化为求最值问题，

$\ln x - ax + 1 \le 0 \Leftrightarrow ax \ge 1 + \ln x \Leftrightarrow a \ge \dfrac{1+\ln x}{x}$，此不等式要恒成立，只需 $a \ge (\dfrac{1+\ln x}{x})_{\max}$，故构造函数求最值，

设 $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2}$，所以 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$， $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$，

从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上↗，在 $(1,+\infty)$ 上↘，故 $f(x)_{\max} = f(1) = 1$，因为 $a \ge f(x)$ 恒成立，所以 $a \ge 1$.

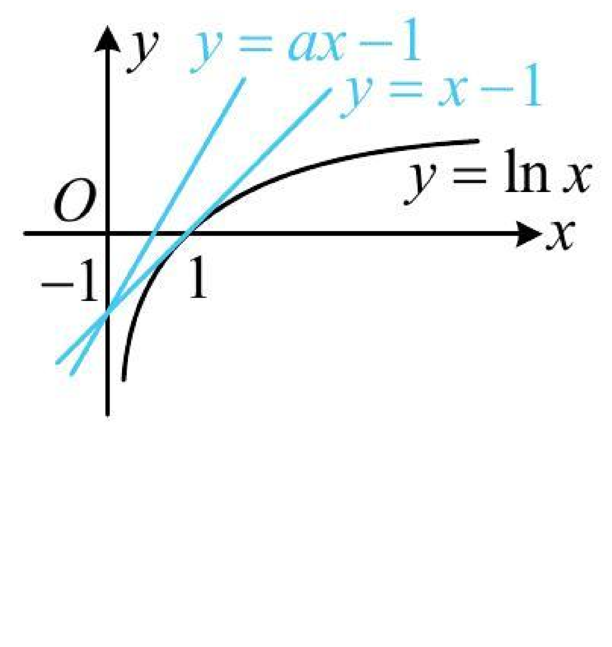
注：此处也可由 $\dfrac{1+\ln x}{x} \le \dfrac{1+(x-1)}{x} = 1$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）得出 $f(x)$ 的最大值为 1.

解法 2：只要将 $\ln x - ax + 1 \le 0$ 中的 $-ax+1$ 移至右侧，就能作图分析，故也可尝试半分离，

$\ln x - ax + 1 \le 0 \Leftrightarrow \ln x \le ax - 1$，如图， $y = ax - 1$ 是绕点 $(0,-1)$ 旋转的直线，

注意到函数 $y = \ln x$ 的图象过点 $(0,-1)$ 的切线是 $y = x - 1$，所以当且仅当 $a \ge 1$ 时， $\ln x \le ax - 1$ 恒成立.

答案：$[1,+\infty)$



【变式】不等式 $a\ln x - x + 1 \le 0$ 恒成立，则实数 $a =$_____.

本题若全分离，则需同除以 $\ln x$，但 $\ln x$ 不恒为正，得讨论，所以半分离较好，

解法 1：$a\ln x - x + 1 \le 0 \Leftrightarrow a\ln x \le x - 1$，接下来对 a 讨论，a 的正负决定是否需要将 $y = \ln x$ 的图象沿 x 轴翻折，所以 0 是一个讨论的分界点；而当 $a > 0$ 时，改变 a 就是对 $y = \ln x$ 的图象进行不同的纵向伸缩，临

界状态是 $y=a\ln x$ 恰与直线 $y=x-1$ 相切的情形（此时 $a=1$），所以 1 是一个讨论的分界点；

当 $a=0$ 时，不等式 $a\ln x\le x-1$ 即为 $0\le x-1$，故 $x\ge 1$，不合题意；

当 $a<0$ 时，如图 1，不等式 $a\ln x\le x-1$ 在 $(0,1)$ 上不成立，不合题意；

当 $a=1$ 时，如图 2，不等式 $a\ln x\le x-1$ 恒成立；

当 $0<a<1$ 时，如图 3，不等式 $a\ln x\le x-1$ 在 $x=1$ 的左侧附近有一段不成立，不合题意；

当 $a>1$ 时，如图 4，不等式 $a\ln x\le x-1$ 在 $x=1$ 的右侧附近有一段不成立，不合题意；

综上所述，实数 $a=1$.

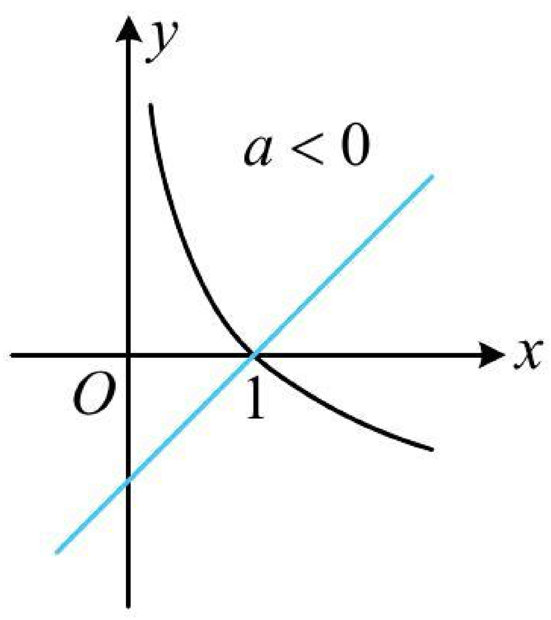


图1

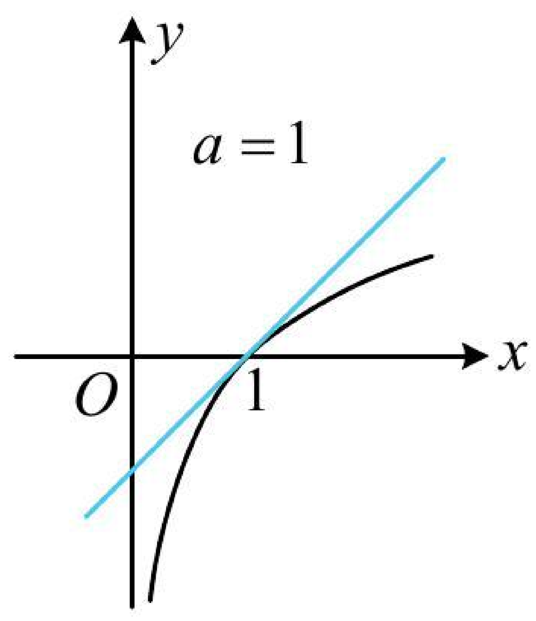


图2

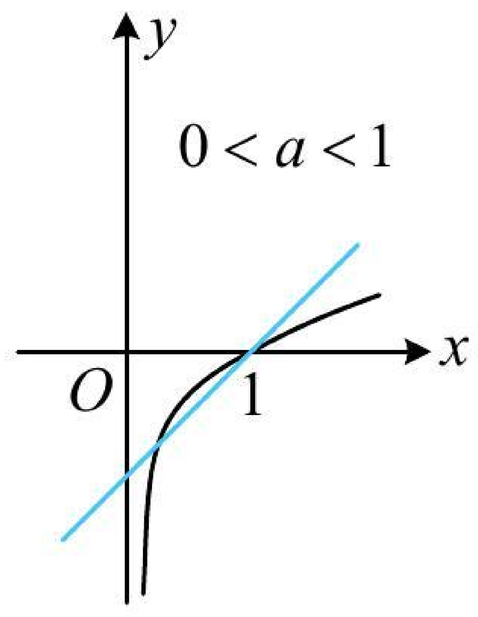


图3

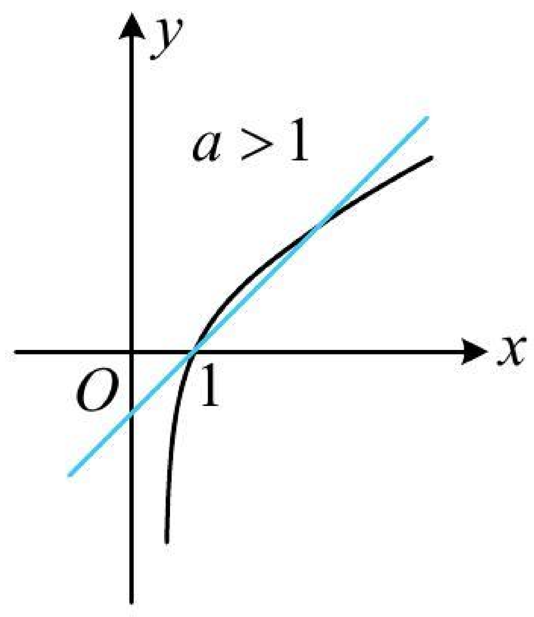


图4

解法 2：在解法 1 中，将原不等式化为 $a\ln x\le x-1$ 后，也可进一步将 a 除到右边，转化为直线旋转型，但需讨论 a 的正负，

当 $a<0$ 时，$a\ln x\le x-1\Leftrightarrow \ln x\ge\dfrac{1}{a}(x-1)$，如图 5，该不等式在 $(0,1)$ 上不成立，不合题意；

当 $a=0$ 时，$a\ln x\le x-1$ 即为 $0\le x-1$，所以 $x\ge 1$，不合题意；

而当 $a>0$ 时，$a\ln x\le x-1\Leftrightarrow \ln x\le\dfrac{1}{a}(x-1)$，$y=\dfrac{1}{a}(x-1)$ 表示过定点 $(1,0)$ 且斜率为 $\dfrac{1}{a}$ 的直线，所以临界状态是 $y=\dfrac{1}{a}(x-1)$ 与 $y=\ln x$ 相切的时候，此时 $a=1$，故又讨论 a 与 1 的大小，

当 $a=1$ 时，如图 6，$y=x-1$ 与 $y=\ln x$ 相切，由图可知不等式 $\ln x\le x-1$ 恒成立，满足题意；

当 $0<a<1$ 时，$\dfrac{1}{a}>1$，如图 7，$\ln x\le\dfrac{1}{a}(x-1)$ 在 $x=1$ 左侧附近有一段不成立，不合题意；

当 $a>1$ 时，$0<\dfrac{1}{a}<1$，如图 8，$\ln x\le\dfrac{1}{a}(x-1)$ 在 $x=1$ 右侧附近有一段不成立，不合题意；

综上所述，实数 $a=1$.

答案：1

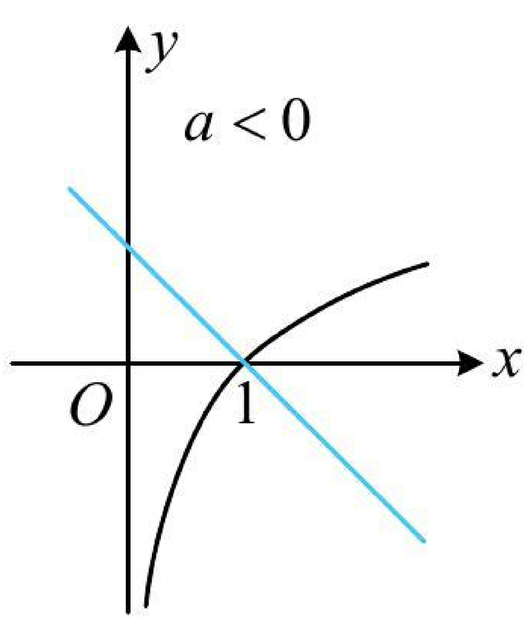


图5

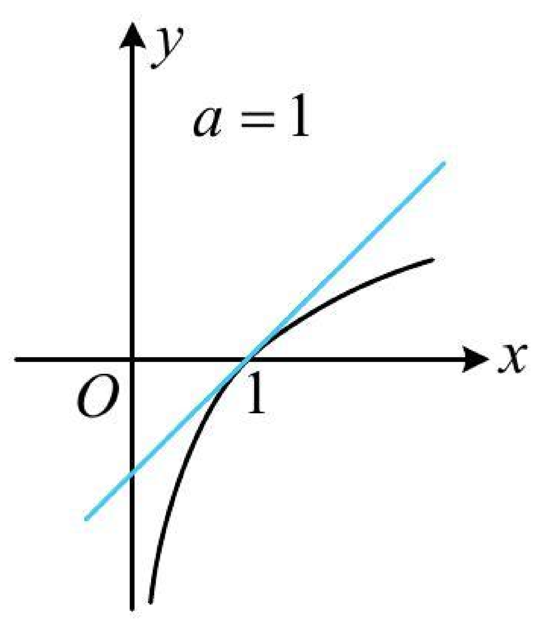


图6

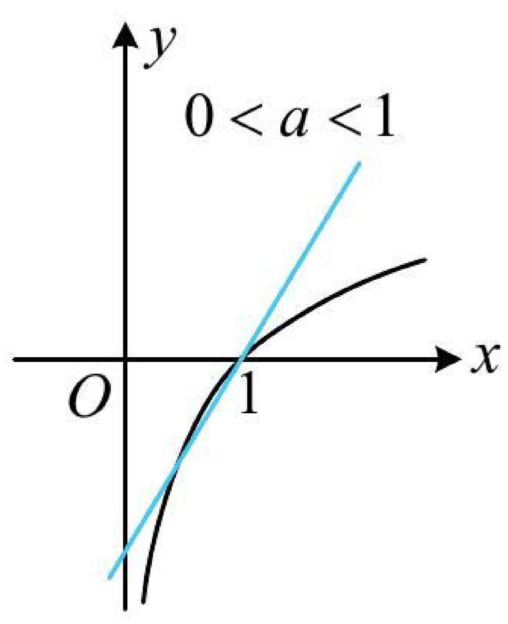


图7

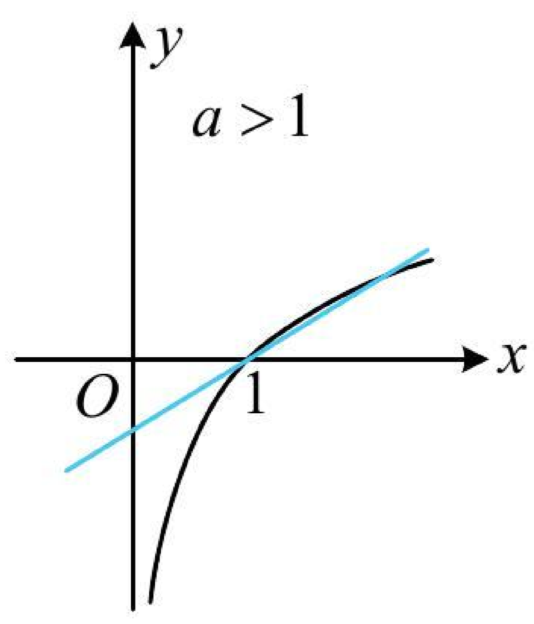


图8

【反思】①像 $af(x)$ 这种结构，若 a 在 $(0,+\infty)$ 上变化，则对 $f(x)$ 的图象进行纵向伸缩；若 a 在 $(-\infty,0)$ 上变

化，则先将 $f(x)$ 的图象沿 x 轴翻折，再纵向伸缩；②半分离常有多种方向，一般研究动直线比动曲线简单.

【总结】从上面两道题可以看到，无论参数在哪个位置，全分离、半分离都是解决含参不等式问题的基本方法.

类型Ⅱ：涉及分段函数的含参不等式问题

【例 2】设函数 $f(x)=\begin{cases}2\ln x, x>0\\ -x^2-2x, x\le 0\end{cases}$，若 $f(x)\le ax+2$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.

解法 1：$f(x)$ 为分段函数，可以分两段分别研究不等式 $f(x)\le ax+2$，

①当 $x\le 0$ 时，$f(x)\le ax+2\Leftrightarrow ax\ge -x^2-2x-2$；两端同除以 x 即可全分离，先考虑 $x=0$ 的情形，

当 $x=0$ 时，不等式 $ax\ge -x^2-2x-2$ 对任意的 $a\in\mathbf{R}$ 都成立；

当 $x<0$ 时，$ax\ge -x^2-2x-2\Leftrightarrow a\le -x+\dfrac{2}{-x}-2$，因为 $-x+\dfrac{2}{-x}-2\ge 2\sqrt{(-x)\cdot\dfrac{2}{-x}}-2=2\sqrt{2}-2$，

当且仅当 $x=-\sqrt{2}$ 时等号成立，所以 $(-x+\dfrac{2}{-x}-2)_{\min}=2\sqrt{2}-2$，故 $a\le 2\sqrt{2}-2$；

②当 $x>0$ 时，$f(x)\le ax+2$ 即为 $2\ln x\le ax+2$，也即 $a\ge\dfrac{2\ln x-2}{x}$，

设 $g(x)=\dfrac{2\ln x-2}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{2(2-\ln x)}{x^2}$，所以 $g'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<e^2$，$g'(x)<0\Leftrightarrow x>e^2$，

从而 $g(x)$ 在 $(0,e^2)$ 上↗，在 $(e^2,+\infty)$ 上↘，故 $g(x)_{\max}=g(e^2)=\dfrac{2}{e^2}$，因为 $a\ge g(x)$ 恒成立，所以 $a\ge\dfrac{2}{e^2}$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[\dfrac{2}{e^2},2\sqrt{2}-2]$.

解法 2：不等式 $f(x)\le ax+2$ 的左右两侧的函数图象都能画，故也可保持这种半分离状态，直接作图分析，

如图，当且仅当直线 $y=ax+2$ 从 l_1 绕点 $(0,2)$ 逆时针旋转至 l_2 时，不等式 $f(x)\le ax+2$ 恒成立，

下面求解这两个临界状态，设 $l_1:y=a_1x+2$，$l_2:y=a_2x+2$，先求 l_1 的斜率 a_1，

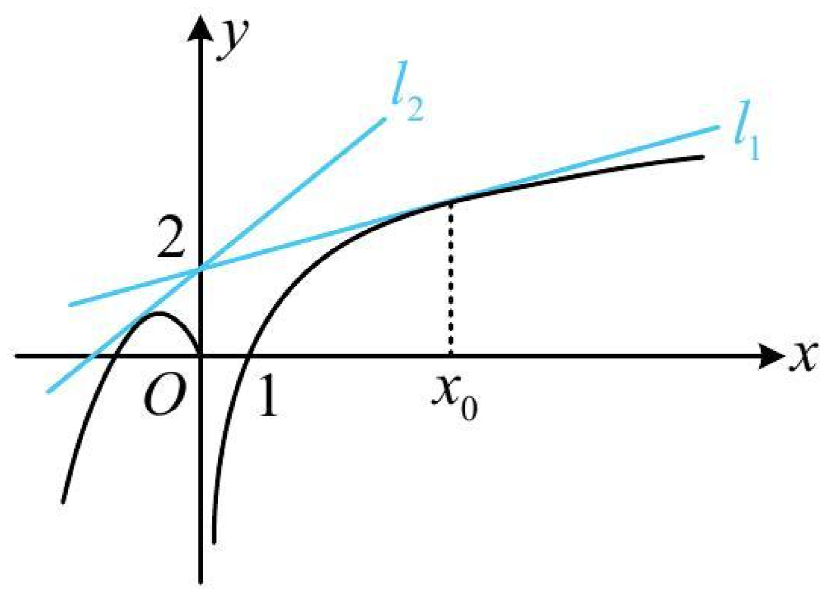
直线 l_1 与 $y=2\ln x$ 相切，设切点为 $(x_0,2\ln x_0)$，因为 $(2\ln x)'=\dfrac{2}{x}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{2}{x_0}=a_1\\ 2\ln x_0=a_1x_0+2\end{cases}$，解得：$a_1=\dfrac{2}{e^2}$；

再求 l_2 的斜率 a_2，l_2 与曲线 $y=-x^2-2x(x\le 0)$ 相切，$\begin{cases}y=a_2x+2\\ y=-x^2-2x\end{cases}\Rightarrow x^2+(a_2+2)x+2=0$，

判别式 $\Delta=(a_2+2)^2-8=0\Rightarrow a_2=2\sqrt{2}-2$ 或 $-2\sqrt{2}-2$（舍去），（过点 $(0,2)$ 能作抛物线 $y=-x^2-2x$ 的两条切线，图中的 l_2 是斜率为正的那条，故将 $-2\sqrt{2}-2$ 舍去）

由图可知，当且仅当 $a\in[\dfrac{2}{e^2},2\sqrt{2}-2]$ 时，$f(x)\le ax+2$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

答案：$[\dfrac{2}{e^2},2\sqrt{2}-2]$



【反思】全分离重在等价变形和求最值，半分离重在分析图象的运动过程，求解临界状态.

类型III：不分离直接带参讨论求导研究

【例 3】已知 $x_1 > x_2$，若不等式 $\dfrac{e^{2x_1}-e^{2x_2}}{x_1-x_2} > me^{x_1+x_2}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为（　　）

（A）$(-\infty,2)$　　（B）$(-\infty,2]$　　（C）$(-\infty,0)$　　（D）$(-\infty,0]$

解析：由 $x_1 > x_2$ 知 $x_1 - x_2 > 0$，所以 $\dfrac{e^{2x_1}-e^{2x_2}}{x_1-x_2} > me^{x_1+x_2} \Leftrightarrow \dfrac{e^{x_1-x_2}-e^{x_2-x_1}}{x_1-x_2} > m \Leftrightarrow e^{x_1-x_2}-e^{x_2-x_1} > m(x_1-x_2)$ ①，

设 $t = x_1 - x_2$，则 $t > 0$，且不等式①即为 $e^t - e^{-t} > mt$，

接下来若全分离，转化成 $m < \dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$，则在研究 $\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$ 的取值范围时，需求当 $t \to 0$ 时，$\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$ 的极限，得用到超纲的洛必达法则，所以尝试不分离直接作差构造函数求导研究，

设 $f(t) = e^t - e^{-t} - mt(t>0)$，则 $f(t) > 0$ 恒成立，

又 $f'(t) = e^t + e^{-t} - m$，$f''(t) = e^t - e^{-t} > 0$，所以 $f'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

注意到 $f'(0) = 2 - m$，所以 m 与 2 的大小就决定了 $f'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是否有零点，所以据此讨论，

当 $m \le 2$ 时，$f'(0) = 2 - m \ge 0$，结合 $f'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗可得 $f'(t) > 0$ 恒成立，

所以 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，又 $f(0) = 0$，所以 $f(t) > 0$ 恒成立，满足题意；

当 $m > 2$ 时，$f'(0) = 2 - m < 0$，且当 $t \to +\infty$ 时，$f'(t) \to +\infty$，所以 $f'(t)$ 有唯一的零点 t_0，

当 $0 < t < t_0$ 时，$f'(t) < 0$，从而 $f(t)$ 在 $(0,t_0)$ 上↘，又 $f(0) = 0$，所以当 $t \in (0,t_0)$ 时，$f(t) < 0$，不合题意；

综上所述，m 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

答案：B

【总结】有时候恒成立问题分离可能不好做或涉及超纲知识，就考虑不分离，直接变形后求导研究.

类型IV：含参不等式整数解个数问题

【例 4】函数 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - ax + 1(a \in \mathbf{R})$，若不等式 $f(x) > 0$ 有且仅有 2 个整数解，则 a 的取值范围为_____.

解法 1：为了便于作图，将 $\dfrac{\ln x}{x} - ax + 1 > 0$ 中的 $-ax+1$ 移至右侧，分析临界状态，

由题意，$f(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} - ax + 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} > ax - 1$，作出 $y = \dfrac{\ln x}{x}$ 和 $y = ax - 1$ 的图象，如图 1，

当直线 $y=ax-1$ 从 l_1（不可取）绕点 $(0,-1)$ 顺时针旋转至 l_2（可取）时，$\dfrac{\ln x}{x}>ax-1$ 有 2 个整数解，

直线 l_1 过点 $(0,-1)$ 和 $(2,\dfrac{\ln 2}{2})$，其斜率 $k_1=\dfrac{2+\ln 2}{4}$，

直线 l_2 过点 $(0,-1)$ 和 $(3,\dfrac{\ln 3}{3})$，其斜率 $k_2=\dfrac{3+\ln 3}{9}$，所以 $\dfrac{3+\ln 3}{9}\le a<\dfrac{2+\ln 2}{4}$.

解法 2：在 $\dfrac{\ln x}{x}-ax+1>0$ 两端除以 x，再移项可将 a 完全分离出来，故也可尝试全分离，

$f(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}-ax+1>0\Leftrightarrow ax<\dfrac{x+\ln x}{x}\Leftrightarrow a<\dfrac{x+\ln x}{x^2}$，下面求导研究函数 $y=\dfrac{x+\ln x}{x^2}(x>0)$ 的图象，

设 $g(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1-x-2\ln x}{x^3}$，

观察可得 $g'(1)=0$，于是看看 $g'(x)$ 在 1 的左右两侧的正负可否直接判断，此处是可以的，

当 $0<x<1$ 时，$1-x>0$，$2\ln x<0$，所以 $g'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$1-x<0$，$2\ln x>0$，所以 $g'(x)<0$；

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上↗，在 $(1,+\infty)$ 上↘，$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=-\infty$，$g(1)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，

据此可作出函数 $y=g(x)$ 的大致图象如图 2，

当 $y=a$ 位于图 2 中 $l_1:y=\dfrac{2+\ln 2}{4}$（不可取）和 $l_2:y=\dfrac{3+\ln 3}{9}$（可取）这两条水平线之间时，

不等式 $a<\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ 有且仅有 $x=1$ 和 $x=2$ 这两个整数解，所以 $\dfrac{3+\ln 3}{9}\le a<\dfrac{2+\ln 2}{4}$.

答案：$[\dfrac{3+\ln 3}{9},\dfrac{2+\ln 2}{4})$

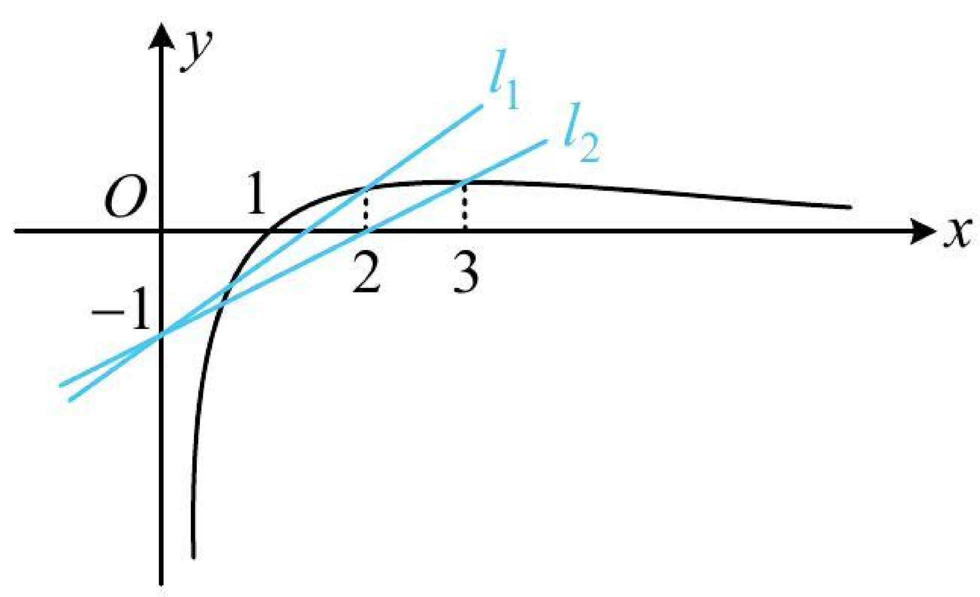


图1

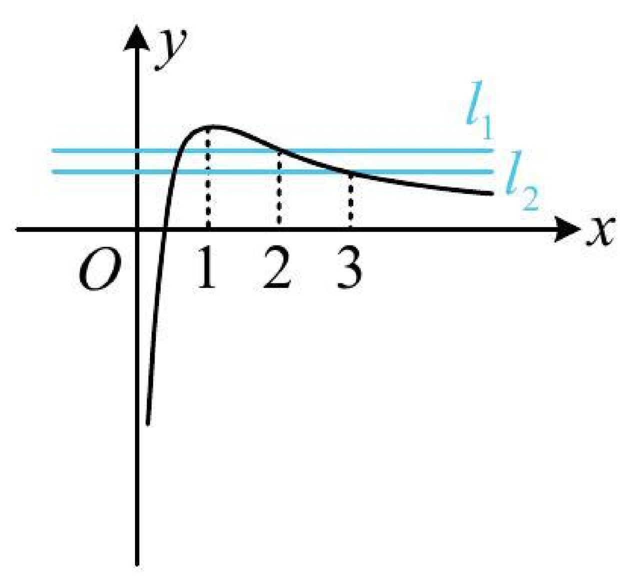


图2

【总结】①研究不等式的整解个数，方法仍是全分离和半分离，但画图分析时，应抓住图象上横坐标为整数的点，找准临界状态；②整解问题的临界状态能否取到，务必仔细斟酌，例如本题若将题干的不等式改为 $f(x)\ge 0$，其余条件不变，则两种解法都要变成 l_1 可取，l_2 不可取.

强化训练

1.（★★）存在 $x>0$，使得 $\ln x-ax+2>0$，则实数 a 的取值范围为_____.

2.（2023 • 新高考Ⅱ卷 • ★★★）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增，则 a 的最小值为（　　）

（A）e^2　　（B）e　　（C）e^{-1}　　（D）e^{-2}

3.（2018 • 天津卷 • ★★★）已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2,x\le 0\\-x^2+2x-2a,x>0\end{cases}$，若对任意的 $x\in[-3,+\infty)$，$f(x)\le|x|$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____.

4.（2022 • 天津模拟 • ★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}\ln x,x>0\\\mathrm{e}^x,x\le 0\end{cases}$，若不等式 $f(x)\le 2|x-a|$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.

5.（2022 • 南昌三模 • ★★★）已知 a 和 x 是正数，若不等式 $x^{\frac{1}{a}}\ge a^{\frac{1}{x}}$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$　　（B）$[\frac{1}{\mathrm{e}},1)$　　（C）$[\frac{1}{\mathrm{e}},1)\cup(1,\mathrm{e})$　　（D）$\{\frac{1}{\mathrm{e}}\}$

6.（2023 • 全国乙卷 • ★★★★）设 $a\in(0,1)$ 若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是_____.

7.（2022 • 江苏模拟 • ★★★★）已知函数 $f(x)=\ln x-a(x^2-x)$，若不等式 $f(x)>0$ 有且仅有两个整数解，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$[\frac{\ln 2}{6},\frac{\ln 3}{6})$　　（B）$(\frac{\ln 2}{6},\frac{\ln 3}{6}]$　　（C）$(-\infty,\frac{\ln 2}{6}]$　　（D）$(\frac{\ln 2}{3},\frac{\ln 3}{3})$